IV/CINEMATIQUE
عـــلـــم الـــحـــركـــيـات

A-IV/ CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT
مميزات الحركة

1/ INTRODUCTION (مقدمة)

- La cinématique est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (comme les forces par exemple…)
- Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions sont théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue.

L'état de mouvement ou de repos d'un corps sont deux notions essentiellement relatives : par exemple une montagne est au repos par rapport à la terre mais en mouvement par rapport à un observateur qui regarde la terre de loin et pour lequel le globe terrestre (avec tout ce qu'il renferme) est en perpétuel mouvement.

Quiconque veut étudier un mouvement doit à priori s'imposer un référentiel (ou un repère) par rapport auquel le mouvement est analysé. Ceci se traduit par le fait qu'un mouvement ne peut se définir que par rapport à un repère.

Cette étude du mouvement s'effectue selon l'une des deux formes :

- **vectorielle :** en utilisant les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$.
- **algébrique** : en définissant l'équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.

2/ POSITION DU MOBILE (موضع المتحرك):

La position d'un point matériel M au temps t est repérée dans un repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (figure 4.1). La formule 4.1 exprime le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

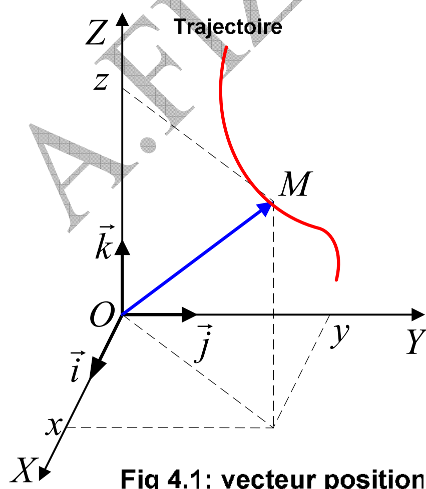


Fig 4.1: vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \qquad (4.1)$$

3/ LES EQUATIONS HORAIRES (المعادلات الزمنية):

Un point matériel est au **repos** dans un repère choisi si ses coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps, et il est en **mouvement** si ses coordonnées varient en fonction du temps.

(On a choisi des coordonnées cartésiennes, mais on aurait pu choisir n'importe quelles autres coordonnées).

Ces coordonnées peuvent être notées par :

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

On appelle ces fonctions, les **équations horaires** du mouvement. On peut les exprimer sous la forme :

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)} \qquad \textbf{(4.3)}$$

- **La trajectoire (المسار)**

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par le mobile au cours de son mouvement pendant des instants successifs. La trajectoire peut être matérielle (la route suivie par une automobile par exemple) ou imaginaire (trajectoire de la lune par exemple).

L'étude d'un mouvement plan se fait en coordonnées rectangulaires dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j})$ où la position est définie par les deux coordonnées : $x(t), y(t)$

La fonction $x \mapsto y(x)$ s'appelle **équation cartésienne de la trajectoire (المعادلة الكارتيزية للمسار).**

On obtient l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les deux équations horaires.

Exemple 4.1 : Les équations horaires du mouvement d'un point matériel tiré dans l'espace sont $x = 2t$; $y = 0$; $z = -5t^2 + 4t$ (toutes les unités sont dans le système international).

1/ Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, quelle est sa forme ?
2/ Ecrire l'expression du vecteur position au temps $t = 2s$

Réponse :

1/ On tire t de l'équation de x qu'on remplace dans z :

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$\boxed{z = -1.25.x^2 + 2.x}$$ C'est l'équation d'une parabole.

2/ Expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}}$$

Exemple 4.2 : Le mouvement d'un point matériel est défini dans un repère cartésien par ses deux équations horaires :

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$
$$y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

Quelle est donc la trajectoire suivie ?

Réponse :

En élève au carré les deux équations, puis on fait la somme membre à membre pour aboutir à l'équation d'un cercle de rayon a :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2\sin^2(\omega.t + \varphi) \\ y^2 &= a^2\cos^2(\omega.t + \varphi) \end{aligned}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

4/ LE VECTEUR VITESSE (شعاع السرعة):

On considère que la vitesse est la distance parcourue par unité de temps.

- **Vecteur vitesse moyenne (شعاع السرعة المتوسطة)**

Regardons la figure 4.2 : entre l'instant t où le mobile occupe la position M, et l'instant t' où le mobile occupe la position M', le vecteur vitesse moyenne est défini comme étant l'expression 4.4.

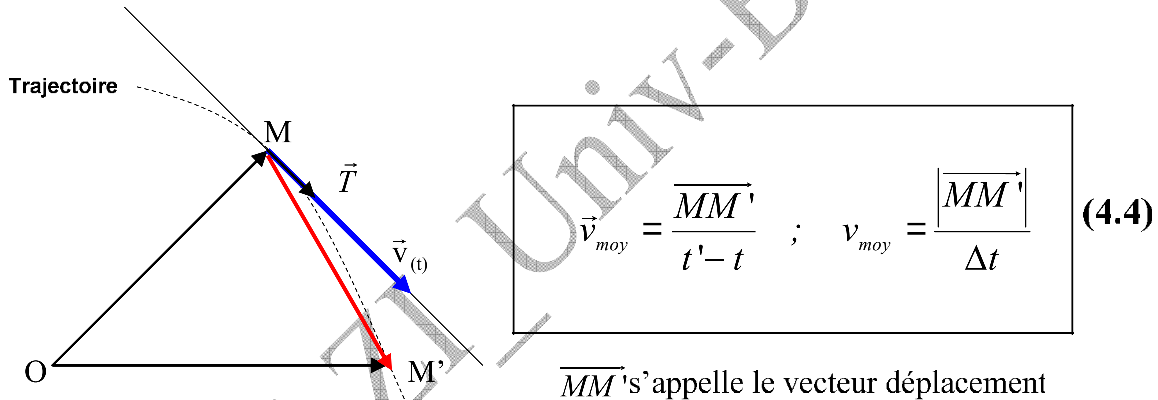


Fig 4.2

- **Vecteur vitesse instantanée (شعاع السرعة اللحظية)**

Le vecteur vitesse instantanée, c'est à dire au temps t, est la dérivée **(مشتقة)** du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}_t = \lim_{t \to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t - t'} = \lim_{t' \to t} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad \textbf{(4.5)}$$

✓ **IMPORTANT : Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{(t)}$ est porté par la tangente à la trajectoire au point M ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement** (Figure 4.3).

Dans le repère cartésien par exemple, on en déduit l'expression du vecteur vitesse instantanée à partir de l'expression du vecteur position en dérivant :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}} \qquad \textbf{(4.6)}$$

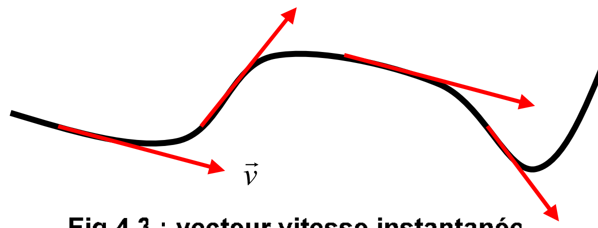


Fig 4.3 : vecteur vitesse instantanée

✓ **CONVENTIONS (مصطلحات)**

- Notation de Newton : on note la dérivée par rapport au temps en mettant un point sur le symbole de la variable. Si la dérivée est par rapport à une variable autre que le temps, la notation est de mettre une apostrophe(') après le symbole de la variable à dériver.
- Notation de Leibnitz : On note la dérivée de y, par exemple, par rapport au temps, par $\frac{dy}{dt}$.

Ainsi nous pouvons écrire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$

❖ **Module du vecteur vitesse instantanée (شدة شعاع السرعة اللحظية)**

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad \textbf{(4.7)}$$

L'unité de la vitesse dans le système international MKS est $m/s = m.s^{-1}$.

Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R$$

5/ LE VECTEUR ACCELERATION (شعاع التسارع):

Nous considérons que l'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps.

❖ **Vecteur accélération moyenne (شعاع التسارع المتوسط)**

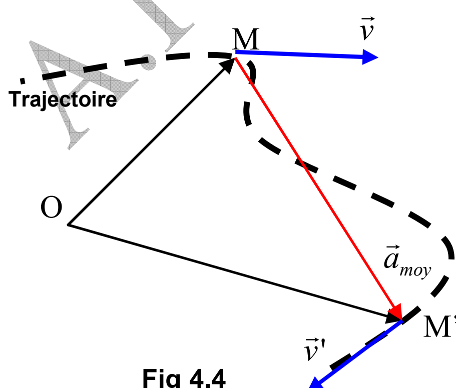


Fig 4.4

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \qquad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.8)}$$

En considérant deux instants différents t et t' correspondants aux vecteurs position

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ et les vecteurs vitesse instantanée $\vec{v}$ et $\vec{v}'$(figure 4.4), le vecteur accélération moyenne est défini par l'expression 4.8

❖ **Vecteur accélération instantanée (شعاع التسارع اللحظي)**

Le vecteur accélération instantanée d'un mouvement est défini comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps.

$$\vec{a} = \lim_{t'\to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

On peut écrire maintenant en résumé les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, avec les conventions de Newton et Leibnitz :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}} \qquad (4.10)$$

Important : **Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire**. (figure4.5)

❖ **Module du vecteur accélération instantanée (طويلة شعاع التسارع اللحظي)**

Ce module est donné par la formule 4.11

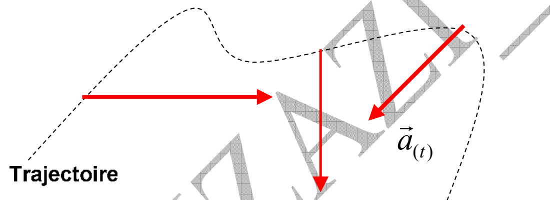


Fig 4.5 : vecteur accélération

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.11)}$$

CONCLUSION : Dans un repère cartésien les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z = a_z \end{pmatrix}_R \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \rightarrow \vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k} \rightarrow \vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

Remarque : Le mouvement est dit accéléré si $\vec{a}.\vec{v} \succ 0$, et décéléré ou retardé si $\vec{a}.\vec{v} \prec 0$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le sens de la vitesse $\vec{v}$.

Exemple 4.3 : Soit le vecteur position $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$. En déduire le vecteur vitesse et le vecteur accélération instantanées, puis calculer le module de chacun d'eux.

Réponse : Nous dérivons deux fois de suite l'expression du vecteur position pour obtenir les vecteurs demandés et ensuite nous déduisons leurs modules :

$$\vec{v} = 4t.\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad , \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$